**3. Fuzzy Mediation and Moderated-Mediation Analysis**

In this section, referring to the basic concepts in [1], we introduce the definition of fuzzy numbers by Zadeh [2], and simple fuzzy mediation models with mediators and fuzzy moderated-mediation model introduced by Yoon [3,4].

**3.1 Fuzzy number**

퍼지 숫자는 실수 R에서 정의되는 퍼지 집합으로서 정규화되고 볼록할 때를 의미한다. 퍼지집합은 Membership function이라고 불리는 함수에 의해 0과 1사이의 실수 값을 소속척도로 취하는 원소들로 구성된다. Membership function의 형태는 객관적이거나 주관적인 가능성을 고려하여 정의할 수 있어 일반적인 규칙이 존재하지 않는다. 따라서 특정한 경우로 LR-퍼지 숫자라고 하는 퍼지 숫자의 parametric class가 사용된다. 퍼지 숫자A가 다음과 같은 조건을 만족하면 LR 퍼지숫자라 한다.

where L and R are reference functions called left and right shape functions of X and have the following properties : L,R :R→[0,1] are left-continuous and decreasing function with R(0) = L(0) = 1, R(1) = L(1) = 0. And ‘m’ means the mode of the LR-fuzzy number A. ‘l’ and ‘r’ are greater than 0 and mean the width of the left and right sides. We abbreviate the LR-fuzzy number as . And LR-fuzzy number, one of the triangular numbers, has the following two operations.

= (,

.

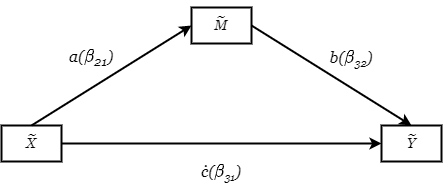
**3.2 Simple Fuzzy Mediation Model**

Baron and Kenny의 Simple mediation model의 매개분석방법은 단순 회귀분석을 통해 인과관계를 단계별로 분석한다. 매개분석은 인과선행변수(X)가 결과변수(Y)에 어떻게 영향을 미치는지에 관한 가설을 검정하는 통계방법이다. Baron and Kenny의 회귀식은 3개가 도출되는데 독립변수와 종속변수 간의 regression, 독립변수와 mediator 사이의 regression 그리고 mediator과 종속변수 사이의 regression 이며 다음과 같이 제안된다[5].

이 모델에서 와 은 중요한 회귀상수이다. 여기서 은 X가 Y에 영향을 미치는 ‘직접효과’를 추정한 것이며, 은 X가 M을 경유하여 Y에 영향을 미치는 ‘간접효과’를 와 의 적항으로 수치화한 것이다. 또한 은 ‘총효과’이며 X의 직접효과와 간접효과의 합계인 와 같다. 다시 말해 직접효과(은 총효과(보다 작다는 사실을 보여준다.

‘많다’, ‘적다’, ‘행복하다’와 같이 수치화 하기 애매할 때, 이를 변수로 하는 경우 crisp 숫자보단 퍼지 숫자를 사용하여 표현하는 것이 더 합리적이다. Fuzzy Mediation Model은 다음과 같이 제안된다.

In the model as above, is the total effect, is the indirect effect, and is the direct effect. Note that it is easily checked that

****

**3.3 Fuzzy Mediation Model for Multiple Mediators**

현실세계는 훨씬 더 복잡하고 다양한 원인에 의한 인과관계로 인해 종종 simple fuzzy mediation model 대신 매개변수가 여러 개인 simple fuzzy mediation for multiple mediators를 이용하는게 현명할 때가 있다.

매개변수가 k(k>1)인 simple fuzzy mediation model은 다음과 같이 제안된다.

where

In the model as above, is the total effect, is the indirect effect through and on , and is the direct effect. In other words, there are k indirect effects.



**3.4 Fuzzy Mediated-Moderation Model**

**3.4.1 Mediatied-Moderation Model**

인과관계에서 네 번째 변수인 조절변수(W)로 인해 독립변수(X)가 매개변수(M)을 통해 종속변수(Y)로 가는 간접효의 영향력이 조절될 수 있는 메커니즘을 moderated-mediation이라 한다. 조절된 매개효과는 통계적으로 조건부 간접효과(conditional indirect effect)를 의미하고 현재는 동일한 의미로 혼용하여 사용한다(Preacher, Rucker & Hayes, 2007)

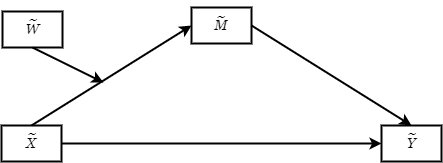
조절분석과 매개분석을 통합한 조건부과정분석은 한 변수가 다른 변수에게 영향을 전달하는 메커니즘의 조건부 성격과 이런 조건부효과에 관한 가설검정을 이해하는 것을 목적으로 한다. 따라서 매개분석의 관심사인 독립변수(X)의 직접효과와 간접효과를 추정하고 조절분석에서 독립변수(X)가 매개변수(M)에 미치는 효과가 조절변수(W)에 의해 조절되는 경우 X가 M에 미치는 영향은 단일 수치가 아닌 W의 함수로 나타난다.

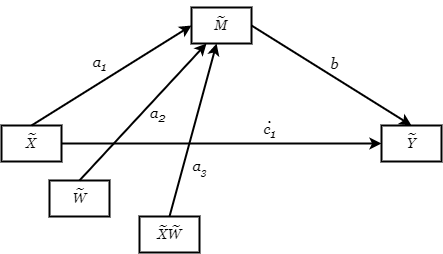
**3.4.2 Fuzzy Mediated-Moderation Model**

모호한 변수를 사용한 인과관계에서 를 퍼지 예측변수라하고 를 퍼지 반응변수 과 을 각각 fuzzy mediator, fuzzy moderator이라 하자. 아래 모형 in the Fig은 에서 의 경로가 에 의해 조절되고 다른 경로는 조절되지 않는 조절된 매개모형이다.

의 간접효과는 에 의해 조절되기 때문에 에 조건적이다. 다음 모델 in Fig을 표현하면:

여기서 은 에서 의 ‘퍼지 조건부 효과’이며, = 의 함수로 정의된다. 따라서 을 통해에서 로 가는 ‘퍼지 조건부 간접효과’는 에서 로 가는 경로의 영향인 b와 의 적항인 로 추정할 수 있다.

****

****

지금까지 Yoon[3,4]에 의해 다양한 퍼지 매개 모델들이 제안되었다. 그러나 아직까지 이런 퍼지모델을 부트스트래핑을 이용하여 검정한 논문은 존재하지 않는다. 다음 4장에서는 부트스트래핑을 통한 단순 퍼지 매개 분석 및 조절된 매개 분석을 먼저 제안하고, 5장에선 기후 데이터 및 다양한 데이터를 부트스트래핑을 이용하여 분석한 것을 제안한다.

**4. Bootstrapping for Fuzzy Mediation and Moderated-Mediation Analysis**

**4.1 Estimation for Fuzzy Mediation Analysis**

When using least squares estimation with fuzzy data, it is necessary to have a suitable metric in the fuzzy set spaces. A helpful type of metric can be established through the use of support functions. The support function of any compact, convex set can be represented as which is determined by the following formula for all :

where is the (d-1)-dimensional unit sphere in and represents the scalar product in . It should be noted that for compact and convex sets the support function is uniquely defined. A metric in a fuzzy number set is established through the use of the *-* metric in the space of Lebesgue integrable functions, represented as:

This leads to the definition of an *-* metric for fuzzy numbers as:

A fuzzy regression model was previously introduced in the author's studies [24,25] and is expressed as follows:

.

The variables are represented by and for It is assumed that are the fuzzy random errors that account for the fuzziness. It is worth mentioning that all cases can be covered by defining and as follows:

where represent the left and right spreads of respectively.

The estimators are obtained by minimizing the following objective function:

where *q* is the number of the regression model in this fuzzy mediation analysis and *k=1,2,…,q*,. The objective function is based on the *-*metric, and the *-* distance can be calculated as:

To minimize the above equation, we obtain the normal equation applying

The normal equation has as its solution, and for each value of , the normal equation can be written as follows:

To determine the solution vector, we introduce a *triangular fuzzy matrix* *(t.f.m.)* which is expressed as

,

and abbreviated as , where is a triangular fuzzy number forandAdditionally, we define a triangular fuzzy vector

.

To minimize the objective function mentioned above, we apply the fuzzy operations, fuzzy numbers and estimators defined in our previous studies [26-29]. The fuzzy operations are as follows:

*.*

The following operations are defined for two triangular fuzzy matrices, , , and a crisp matrix :

,

*,*

*,* .

.

The solutions to the normal equation fuzzy estimators are derived for each by using the above operations and algebraic properties, with

where

and , for Note that the solution (16) exists only if .

**4.2 Statistical inferences of Fuzzy Mediation Model**

본 절에서는 3절에서 제안한 모델에 대한 부트스트랩을 이용한 신뢰구간, 검정통계 등의 통계적 추론을 제안한다.

**4.2.1 Inferences on the total and direct Effect**

**4.3 Test statistics for fuzzy model**

**4.3.1 Sobel test**

간접효과에 대한 정규 이론 접근법은 “Sobel test” 또는 “delta method” 또는 “product of coefficients method”으로 언급된다[ ]. 간접효과 ab는 표본을 기준으로 한 의 추정값이다. 간접효과의 유의성 수준은 아래와 같이 매개효과 추정치를 추정치의 표준오차 로 나눈 값을 검정통계량으로 하여 정규분포(Z)를 통해 판정한다.

where (first order standard error estimator) or (second order standard error estimator). Here, are the standard error of and *b*, respectively.

*CI for the indirect effect*

where .

Based on above assumptions, the hypothesis test

,

is performed asymptotically based on following test statistic under :

Sobel 검정의 경우 p-값은 간접효과의 표본 분포의 정규성을 가정하고 표준 정규 분포를 사용하여 도출한다. 이러한 가정은 표본이 큰 경우에는 합리적이지만, 작은 표본에서는 그렇지 않다. 일반적으로 상황에 따라 달라지는 가정은 낮은 검정력을 산출한다. 아직까지 많은 분야의 전문가들이 sobel 검정을 여전히 사용하고 있다.

**4.3.2 Bootstrapping**

정규성을 가정하는 매개효과 검정 방법들이 가지는 한계를 극복하기 위해 부트스트랩이 제안되었다. 부트스트랩은 매개효과 추정치의 표집분포에 대한 가정이 필요 없는 비모수적이고 경험적인 재표집 방법이다.

1. Hayes, A.F. ‘‘Introduction to mediation, moderation, and conditional process analysis’’, Guilford (1e, 2013/2e, 2018)

2. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information and control. 8, 338-353 (1965)

3. Yoon, J.-H.: Fuzzy mediation analysis. Int. J. Fuzzy Syst.22(1), 338-349 (2020)

5. Baron R.M., Kenny D.A.: The moderator-mediator variable distinction in social psychological research: conceptual, strategic, and statistical considerations. J Pers Soc Psychol. 51(6), 1173-82 (1986)